

VI. Системы линейных уравнений (п.39 – 44)

Базовые знания и умения:

- знать определение линейного уравнения с двумя переменными и способы его решения;
- уметь находить решения линейного уравнения с двумя переменными;
- знать, что представляет собой график линейного уравнения с двумя переменными и уметь его строить;
- знать, что представляет собой система линейных уравнений с двумя переменными и ее решение;
- уметь решать системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки и способом сложения;
- уметь решать задачи с помощью систем линейных уравнений с двумя переменными.
-

Теоретический материал.

1. **Линейным уравнением** с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, x и y – переменные, a , b и c – некоторые числа.
2. **Решением уравнения** с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.
3. **Графиком уравнения** с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.
4. **Графиком линейного уравнения** с двумя переменными, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, **является прямая**.
5. **Решением системы уравнений** с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.
6. Графиками уравнений системы являются прямые. Если эти прямые пересекаются, то система имеет **единственное решение**; если прямые параллельны, то система **не имеет решений**; если прямые совпадают, то **решений бесконечно много**.
7. **Способ подстановки**. При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки поступают следующим образом:
 - 1) выражают из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую;
 - 2) подставляют в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;
 - 3) решают получившееся уравнение с одной переменной;
 - 4) находят соответствующее значение второй переменной.
8. **Способ сложения**. При решении двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения поступают следующим образом:
 - 1) умножают почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;
 - 2) складывают почленно левые и правые части уравнений системы;
 - 3) решают получившееся уравнение с одной переменной;
 - 4) находят соответствующее значение второй переменной.
9. **При решении задач с помощью систем уравнений** поступают следующим образом:
 - 1) обозначают некоторые неизвестные числа буквами и, используя условие задачи, составляют систему уравнений;

- 2) решают эту систему;
- 3) истолковывают результат в соответствии с условием задачи.

Примеры решения заданий.

1. Выяснить, имеет ли решения система:

$$а) \begin{cases} x - 3y = 5, \\ 4x - 12y = 25; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x + 7y = 1, \\ x - 3y = 2; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 3x - y = 4, \\ 15x - 5y = 20. \end{cases}$$

Решение:

$$а) \begin{cases} x - 3y = 5, \\ 4x - 12y = 25; \end{cases}$$

Выразим переменную y через x в каждом уравнении системы.

$$\begin{cases} -3y = -x + 5, \\ -12y = -4x + 25; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}, \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{25}{12}. \end{cases}$$

Так как коэффициенты при x одинаковы, а свободные члены различны, то прямые параллельны. Значит, система не имеет решений.

$$б) \begin{cases} 2x + 7y = 1, \\ x - 3y = 2; \end{cases}$$

Выразим переменную y через x в каждом уравнении системы.

$$\begin{cases} 7y = -2x + 1, \\ -3y = -x + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}, \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Так как коэффициенты при x различны, то прямые пересекаются. Значит, система имеет одно решение.

$$в) \begin{cases} 3x - y = 4, \\ 15x - 5y = 20. \end{cases}$$

Выразим переменную y через x в каждом уравнении системы.

$$\begin{cases} -y = -3x + 4, \\ -5y = -15x + 20; \\ y = 3x - 4, \\ y = 3x - 4. \end{cases}$$

Уравнения абсолютно одинаковые. Значит, прямые совпадают, и система имеет бесконечно много решений.

2. Решить методом подстановки систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 3y = 4, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Выразим переменную x через y из первого уравнения.

$$\begin{cases} x = 3y + 4, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$$

Подставим выражение $(3y + 4)$ вместо x во второе уравнение.

$$\begin{cases} x = 3y + 4, \\ 2(3y + 4) - y = 3; \end{cases}$$

Решаем второе уравнение и находим y .

$$\begin{cases} x = 3y + 4, \\ 6y + 8 - y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 4, \\ 5y = 3 - 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 4, \\ 5y = -5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 4, \\ y = -1; \end{cases}$$

Найденное значение y подставляем в первое уравнение.

$$\begin{cases} x = 3 \cdot (-1) + 4, \\ y = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(1; -1)$.

3. Решить методом сложения систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x - 5y = 2, \\ 6x - 7y = -11; \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на 3, а второго – на (-2) .

$$\begin{cases} 12x - 15y = 6, \\ -12x + 14y = 22; \end{cases}$$

Сложим почленно эти уравнения.

$$\begin{aligned} 0x - y &= 28; \\ -y &= 28; \\ y &= -28. \end{aligned}$$

Подставим данное значение y в любое из исходных уравнений и найдем x .

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 2; \\ 4x - 5 \cdot (-28) &= 2; \\ 4x + 140 &= 2; \end{aligned}$$

$$4x = 2 - 140 ;$$

$$4x = -138 ;$$

$$x = -138 : 4 ;$$

$$x = -34,5.$$

Ответ: (- 34,5 ; - 28)

4. Решить задачу с помощью системы уравнений.

Лодка за 2 ч движения по течению и 5 ч движения против течения прошла 120 км.

За 7 ч движения против течения она прошла на 52 км больше, чем за 3 ч движения по течению. Найти скорость лодки по течению и ее скорость против течения.

Решение:

Пусть скорость лодки по течению $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а против течения $-y \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Лодка за 2 ч

движения по течению и 5 ч движения против течения прошла $(2x + 5y)$ км, что по условию задачи составляет 120 км. За 7 ч движения против течения она прошла больше, чем за 3 ч движения по течению на $(7y - 3x)$ км, что по условию задачи составляет 52 км.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 120, \\ 7y - 3x = 52; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 120, \\ -3x + 7y = 52; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 120, \\ -6x + 14y = 104; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 15y = 360, \\ -6x + 14y = 104; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 29y = 464, \\ 2x + 5y = 120; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 29y = 464, \\ 2x + 5 \cdot 16 = 120; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 16, \\ 2x + 5 \cdot 16 = 120; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 16, \\ 2x = 40; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 16, \\ 2x = 40; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 16, \\ x = 20. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 16, \\ x = 20. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 16, \\ x = 20. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 16, \\ x = 20. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 16, \\ x = 20. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 16, \\ x = 20. \end{cases}$$

Значит, скорость лодки по течению $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а против течения $-16 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $16 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Решите самостоятельно.

Задания обязательного уровня.

1. Выяснить, имеет ли решения система:

а) $\begin{cases} y + 2x = 9, \\ 3x - 5y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 6x + 4y = 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 3y = -4, \\ 6x - 9y = -12. \end{cases}$

2. Решить методом подстановки систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3x + y = 4, \\ 5x - 2y = 14. \end{cases}$$

3. Решить методом сложения систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 7; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 5x - 6y = 7, \\ 10x + 6y = 8. \end{cases}$$

4. Катер за 4ч движения по течению реки и 3 ч движения по озера прошел 148 км. За 5 ч движения против течения реки он прошел на 50 км больше, чем за 2 ч движения по озеру. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения.

Задания повышенного уровня.

1. Решить систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} 6x - 4y = 10, \\ 11x + 3y = 39; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 5x - 4y = 8, \\ 15x - 12y = 20. \end{cases}$$

2. Задать формулой линейную функцию, график которой проходит через точки М (2;1) и К (-3; 16).

3. В двух шкафах стояли книги. Если из первого шкафа переставить во второй 10 книг, то в обоих шкафах книг станет поровну. Если же со второго шкафа переставить в первый 44 книги, то в нем останется в 4 раза меньше книг, чем в первом. Сколько книг было в каждом шкафу?