Понятие квадратного корня из неотрицательного числа

Рассмотрим уравнение $x^2 = 4$. Решим его графически. Для этого в одной системе **координат** построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 4$ (рис. 74). Они пересекаются в двух точках A (- 2; 4) и B(2; 4). Абсциссы точек A и B являются корнями уравнения $x^2 = 4$. Итак, $x_1 = - 2$, $x_2 = 2$.

Рассуждая точно так же, находим корни уравнения $x^2 = 9$ (см. рис. 74): $x_1 = - 3$, $x_2 = 3$.

А теперь попробуем решить уравнение $x^2 = 5$; геометрическая иллюстрация представлена на рис. 75. Ясно, что это уравнение имеет два корня x_1 и x_2, причем эти числа, как и в двух предыдущих случаях, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку (x_1 — - x_2)- Но в отличие от предыдущих случаев, где корни уравнения были найдены без труда (причем их можно было найти и не пользуясь графиками), с уравнением $x^2 = 5$ дело обстоит не так: по чертежу мы не можем указать значения корней, можем только установить, что один **корень** располагается чуть левее точки - 2, а второй — чуть правее точки 2.

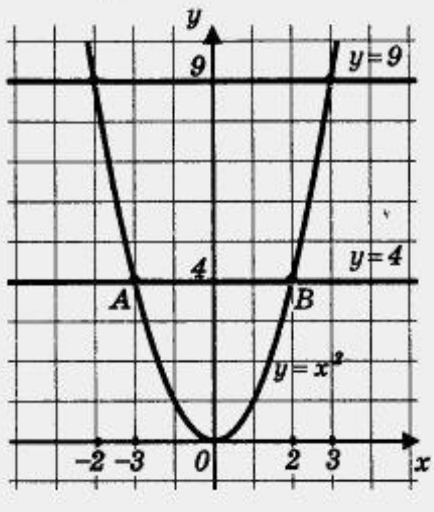

Рис. 74

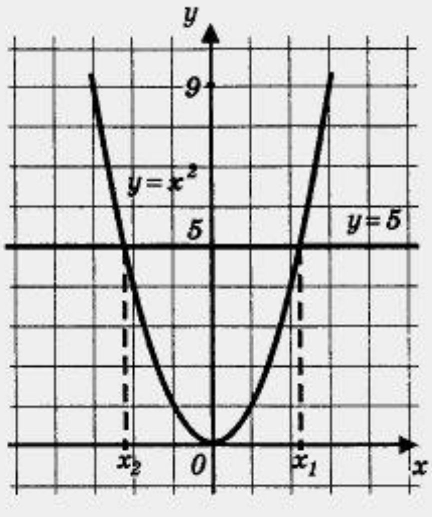

Рис. 75

Что же это за число (точка), которое располагается чуть правее точки 2 и которое в квадрате дает 5? Ясно, что это не 3, так как $3^2 = 9$, т. е. получается больше, чем нужно (9 > 5).

Значит, интересующее нас число расположено между числами 2 и 3. Но между числами 2 и 3 находится бесконечное множество рациональных чисел, например $\frac{17}{8}, \frac{25}{11}, \frac{2973}{1000}$ и т. д. Может быть, среди них найдется такая дробь $\frac{m}{n}$, что $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$? Тогда никаких проблем с уравнением x^2 — 5 у нас не будет, мы сможем написать, что $x_1 = \frac{m}{n}, x_2 = -\frac{m}{n}$.

Но тут нас ждет неприятный сюрприз. Оказывается, нет такой **дроби** $\frac{m}{n}$, для которой выполняется равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$

Доказательство сформулированного утверждения довольно сложно. Тем не менее мы его приводим, поскольку оно красиво и поучительно, очень полезно попытаться его понять.

Предположим, что имеется такая несократимая дробь $\frac{m}{n}$, для которой выполняется равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$. Тогда $\frac{m^2}{n^2} = 5$, т. е. $m^2 = 5n^2$. Последнее равенство означает, что **натуральное число** m^2 делится без остатка на 5 (в частном получится п2).

Следовательно, число m^2 оканчивается либо цифрой 5, либо цифрой 0. Но тогда и натуральное число m оканчивается либо цифрой 5, либо цифрой 0, т.е. число m делится на 5 без остатка. Иными словами, если число т разделить на 5, то в частном получится какое-то натуральное число k. Это значит, что m = 5k.

А теперь смотрите:

$m^2 = 5n^2$;

Подставим 5k вместо m в первое равенство:

$(5k)^2 = 5n^2$, т. е. $25k^2 = 5n^2$ или $n^2 = 5k^2$.

Последнее равенство означает, что число. $5n^2$ делится на 5 без остатка. Рассуждая, как и выше, приходим к выводу о том, что и число n делится на 5 без **остатка**.

Итак, m делится на 5, n делится на 5, значит, дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить (на 5). Но ведь мы предполагали, что дробь $\frac{m}{n}$ несократимая. В чем же дело? Почему, правильно рассуждая, мы пришли к абсурду или, как чаще говорят математики, получили противоречие"! Да потому, что неверной была исходная посылка, будто бы существует такая несократимая дробь $\frac{m}{n}$, для которой выполняется равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$

Отсюда делаем вывод: такой дроби нет.

Метод доказательства, который мы применили только что, называют в математике методом доказательства от противного. Суть его в следующем. Нам нужно доказать некоторое утверждение, а мы предполагаем, что оно не выполняется (математики говорят: «предположим противное» — не в смысле «неприятное», а в смысле «противоположное тому, что требуется").

Если в результате правельных рассуждений приходим к противоречию с условием, то делаем вывод: наше предположение неверно, значит, верно то, что требовалось доказать.

Итак, располагая только **рациональными числами** (а других чисел мы с вами пока не знаем), уравнение $x^2= 5$ мы решить не сможем.

Встретившись впервые с подобной ситуацией, математики поняли, что надо придумать способ ее описания на математическом языке. Они ввели в рассмотрение новый символ $\sqrt{\ }$, который назвали квадратным корнем, и с помощью этого символа корни уравнения $x^2 = 5$ записали так: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$

чиется: «корень квадратный из 5"). Теперь для любого уравнения вида $x^2 = a$, где $a >$ О, можно найти корни — ими являются числа $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$, (рис. 76).

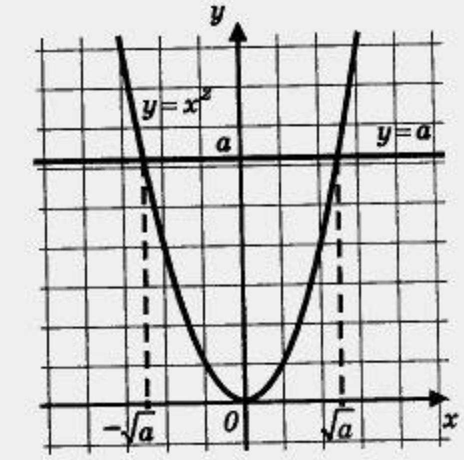

Рис. 76

Еще раэ подчеркнем, что число $\sqrt{5}$ не целое и не дробь.

Значит, $\sqrt{5}$ не рациональное число, это число новой природы, о таких числах мы специально поговорим позднее, в главе 5.

Пока лишь отметим, что новое число $\sqrt{5}$ находится между числами 2 и 3, поскольку $2^2 = 4$, а это меньше, чем 5; $3^2 = 9$, а это больше, чем 5. Можно уточнить:

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3.$$

В самом деле, $2{,}2^2 = 4{,}84 < 5$, а $2{,}3^2 = 5{,}29 > 5$. Можно еще уточнить:

$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24;$$

действительно, $2{,}23^2 = 4{,}9729 < 5$, а $2{,}24^2 = 5{,}0176 > 5$.

На практике обычно полагают, что число $\sqrt{5}$ равно 2,23 или оно равно 2,24, только это не обычное равенство, а приближенное равенство, для обозначения которого используют символ ».

Итак, $\sqrt{5} \approx 2{,}23$ или $\sqrt{5} \approx 2{,}24.$

Обсуждая решение уравнения $x^2 = a$, мы столкнулись с довольно типичным для математики положением дел. Попадая в нестандартную, нештатную (как любят выражаться космонавты) ситуацию и не найдя выхода из нее с помощью известных средств, математики придумывают для впервые встретившейся им математической **модели** новый термин и новое обозначение (новый символ); иными словами, они вводят новое понятие, а затем изучают свойства этого понятия. Тем самым новое понятие и его обозначение становятся достоянием математического языка. Мы действовали так же: ввели термин «корень квадратный из числа а», ввели символ $\sqrt{a}$ для его обозначения, а чуть позднее изучим свойства нового понятия. Пока мы знаем лишь одно: если а > 0,

то $\sqrt{a}$ — положительное число, удовлетворяющее уравнению $x^2 = a$. Иными словами, $\sqrt{a}$ — это такое положительное число, при возведении которого в квадрат получается число а.

Поскольку **уравнение** $x^2 = 0$ имеет корень x = 0, условились считать, что $\sqrt{0} = 0.$ Теперь мы готовы дать строгое определение.

Определение. Квадратным корнем из неотрицательного числа а называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен а.

Это число обозначают $\sqrt{a}$, число а при этом называют подкоренным числом. Итак, если а — неотрицательное число, то:

$$\boxed{1)\ \sqrt{a} \geq 0; \quad 2)\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.}$$

Если а < О, то уравнение x^2 = а не имеет корней, говорить в этом случае о квадратном корне из числа а не имеет смысла.

Таким образом, выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл лишь при а > 0.

Говорят, что $\sqrt{a} = b$ и $b^2 = a$ — одна и та же математическая модель (одна и та же зависимость между неотрицательными числами (а и b), но только вторая описана на более простом языке, чем первая (использует более простые символы).

Операцию нахождения квадратного корня из неотрицательного числа называют извлечением квадратного корня. Эта операция является обратной по отношению к возведению в квадрат. Сравните:

Возведение в квадрат	Извлечение квадратного корня
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$
$0,3^2 = 0,09$	$\sqrt{0,09} = 0,3$

Еще раз обратите внимание: в таблице фигурируют только положительные числа, поскольку это оговорено в определении квадратного корня. И хотя, например, $(-5)^2 = 25$ — верное равенство, перейти от него к записи с использованием квадратного корня (т.е. написать, что . $\sqrt{25} = -5)$)

нельзя. По определению, . $\sqrt{25}$ — положительное число, значит, $\sqrt{25} = 5$ (а не -5). .
Часто говорят не «квадратный корень», а «арифметический квадратный корень». Термин «арифметический» мы опускаем для краткости.

Пример 1. Вычислить:

а) $\sqrt{49}$; в) $\sqrt{0}$; д) $\sqrt{-4}$; ж) $\sqrt{5625}$.

б) $\sqrt{0,25}$; г) $\sqrt{17}$; е) $\sqrt{961}$;

Решение.

а) $\sqrt{49} = 7$, поскольку $7 > 0$ и $7^2 = 49$.

б) $\sqrt{0,25} = 0,5$, так как $0,5 > 0$ и $0,5^2 = 0,25$.

в) $\sqrt{0} = 0$.

г) В отличие от предыдущих примеров мы не можем указать точное значение числа $\sqrt{17}$. Ясно лишь, что оно больше, чем 4, но меньше, чем 5, поскольку $4^2 = 16$ (это меньше, чем 17), а $5^2 = 25$ (это больше, чем 17).

Впрочем, приближенное значение числа $\sqrt{17}$ можно найти с помощью **микрокалькулятора**, который содержит операцию извлечения квадратного корня; это значение равно 4,123.

Итак, $\sqrt{17} \approx 4,123$.

Число $\sqrt{17}$, как и рассмотренное выше число $\sqrt{5}$ » не является рациональным.

д) Вычислить $\sqrt{-4}$ нельзя, поскольку квадратный корень из отрицательного числа не существует; запись $\sqrt{-4}$ лишена смысла. Предложенное задание некорректно.

е) $\sqrt{961} = 31$, так как $31 > 0$ и $31^2 = 961$. В подобных случаях приходится использовать таблицу квадратов натуральных чисел или микрокалькулятор.

ж) $\sqrt{5625} = 75$, поскольку $75 > 0$ и $75^2 = 5625$.

В простейших случаях значение квадратного корня вычисляется сразу:

$\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{0,01} = 0,1$ и т. д. В более сложных случаях приходится использовать таблицу квадратов чисел или проводить вычисления с помощью микрокалькулятора. А как быть, если под рукой нет ни таблицы, ни калькулятора? Ответим на этот вопрос, решив следующий пример.

Пример 2. Вычислить $\sqrt{2809}$.

Решение.

<u>Первый этап.</u> Нетрудно догадаться, что в ответе получится 50 с «хвостиком». В самом деле, $50^2 = 2500$, а $60^2 = 3600$, число же 2809 находится между числами 2500 и 3600.

<u>Второй этап.</u> Найдем «хвостик», т.е. последнюю цифру искомого числа. Пока мы знаем, что если корень извлекается, то в ответе может получиться 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58 или 59. Проверить надо только два числа: 53 и 57, поскольку только они при возведении в квадрат дадут в результате четырехзначное число, оканчивающееся цифрой 9, т. е. той же цифрой, которой оканчивается число 2809.

Имеем 532 = 2809 — это то, что нам нужно (нам повезло, мы сразу попали в «яблочко»). Значит, $\sqrt{2809}$. = 53.

Ответ:

$\sqrt{2809}$. = 53

Пример 3. Катеты прямоугольного треугольника равны 1 см и 2 см. Чему равна гипотенуза треугольника ? (рис.77)

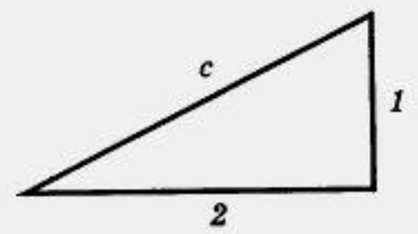

Рис. 77

Решение.

Воспользуемся известной из геометрии теоремой Пифагора: сумма квадратов длин катетов прямоугольного треугольника равна квадрату длины его гипотенузы, т. е. $a^2 + b^2 = c^2$, где a, b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника.

Значит,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\text{, т. е. } c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Ответ: $\sqrt{5}$ см.

Этот пример показывает, что введение квадратных корней — не прихоть математиков, а объективная необходимость: в реальной жизни встречаются ситуации, математические модели которых содержат операцию извлечения квадратного корня. Пожалуй, самая важная из таких ситуаций связана с решением квадратных уравнений. До сих пор, встречаясь с квадратными уравнениями $ax^2 + bx +$

$c = 0$, мы либо раскладывали левую часть на множители (что получалось далеко не всегда), либо использовали графические методы (что тоже не очень надежно, хотя и красиво). На самом деле для отыскания корней x^1 и x^2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в математике используются формулы

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

содержащие, как видно, знак квадратного корня.Эти формулы применяются на практике следующим образом. Пусть, например, надо решить уравнение $2x^2 + bx - 7 = 0$. Здесь $a = 2$, $b = 5$, $c = - 7$. Следовательно,

$b2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (- 7) = 81$. Далее находим $\sqrt{81} = 9$. Значит,

$$x_1 = \frac{-5+9}{2\cdot 2} = 1; \quad x_2 = \frac{-5-9}{2\cdot 2} = -3{,}5.$$

Выше мы отметили, что $\sqrt{5}$ — не рациональное число.
Математики такие числа называют иррациональными. Иррациональным является любое число вида $\sqrt{n}$, если квадратный корень не извлекается.
Например, $\sqrt{6}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{20}$ и т.д. — иррациональные числа. В главе 5 мы более подробно поговорим о рациональных и иррациональных числах. Рациональные и иррациональные числа вместе составляют множество действительных чисел, т.е. множество всех тех чисел, которыми мы оперируем в реальной жизни (в действительности). Например, $-5; 0; 1{,}3; 3{,}25; \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{17}$ — все это действительные числа.
Подобно тому, как выше мы определили понятие квадратного корня, можно определить и понятие кубического корня: кубическим корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, куб которого равен a. Иными словами, равенство $\sqrt[3]{a} = b$ означает, что $b^3 = a$.

Например, $\sqrt[3]{27} = 3$, так как $3^3 = 27$; $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4^3 = 64$; $\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$, так как $0{,}1^3 = 0{,}001$.

Более того, в математике введено понятие *корня n-й степени* ($n = 2, 3, 4, \ldots$) *из неотрицательного числа*: если $a \geqslant 0$, то запись $\sqrt[n]{a} = b$ означает, что $b \geqslant 0$ и $b^n = a$. Например, $\sqrt[4]{81} = 3$, так как $3 > 0$ и $3^4 = 81$; $\sqrt[5]{32} = 2$, так как $2 > 0$ и $2^5 = 32$.